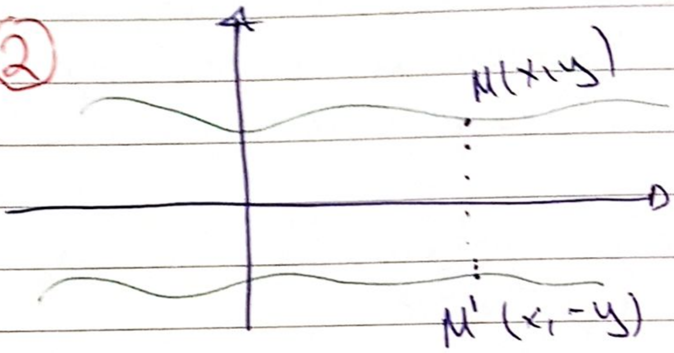
4/5/18

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

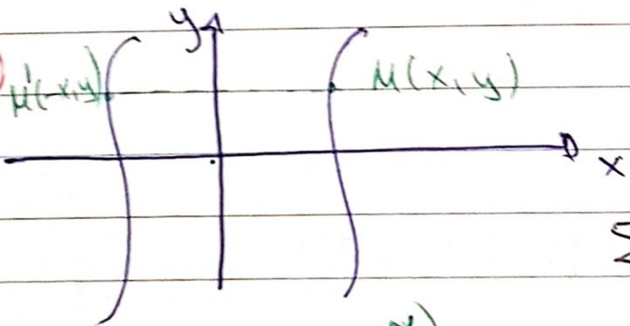
2



$$\begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Συμμετρία ως προς τον άξονα των x

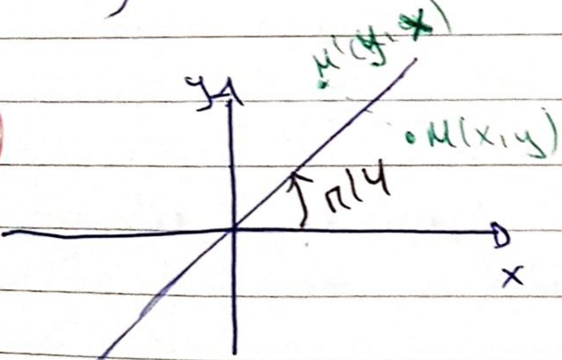
3



$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ \sin(\pi) & -\cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συμμετρία ως προς τον άξονα των y

4



Συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & -\cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ παριστάνει συμμετρία ως προς ευθεία (ε) στο επίπεδο, η οποία και να βρεθεί, και να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα των x.

ΛΥΣΗ: Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος και $|A|=-1$. Άρα ο A παριστάνει ανάκλαση ως προς ευθεία (ε) η οποία σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα των x. Η γωνία θ είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0,2\pi)$: $\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Γνωρίζουμε ότι $\lambda_1=1$ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{e_1}$. Εύκολα, βλέπουμε ότι $\vec{e_1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},1\right)$. Τότε:

$(\varepsilon): V(1)=\{k\cdot\vec{e_1}\in\mathbb{R}^2 \mid k\in\mathbb{R}\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (EULER): Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ μια ισομετρία στον $\mathbb{R}^3$ και έστω $A=M_B^B(f)$ ο πίνακας της f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Αν $\boxed{|A|=1}$, τότε: η ισομετρία f ή ισοδύναμα ο πίνακας A, παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) στον $\mathbb{R}^3$ γύρω από ~~άξονα~~ ευθεία (ε) η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο (Π), κατά γωνία θ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα δείξουμε ότι ο f έχει μία πραγματική ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

$P_A(t)=|A-t\cdot I_3|$: πολυώνυμο βαθμού 3 με πραγματικούς συντελεστές

$\longrightarrow$

Επειδή το πολυώνυμο $P_A(t)$ έχει γενικά όλες του τις ρίζες στους μιγαδικούς αριθμούς, και αν $z = a + bi$ είναι ρίζα του $P_A(t)$, τότε ρίζα θα είναι και ο $\bar{z} = a - bi$. Έπεται ότι το πολυώνυμο $P_A(t)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα λ_1.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ (GAUSS)

Κάθε πολυώνυμο $P(t)$ με πραγματικούς συντελεστές έχει όλες του τις ρίζες στο $\mathbb{C}$, ισοδύναμα, υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, \ldots, z_n$ έτσι ώστε: $P(t) = (t - z_1)\cdot(t - z_2)\cdot \ldots \cdot(t - z_n)$

Γενικά, αν z: ρίζα του $P(t)$, τότε και ο $\bar{z}$ είναι ρίζα του $P(t)$

Ιδιαίτερα, κάθε πολυώνυμο $P(t)$ με πραγματικούς συντελεστές περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ρίζες του $P_A(t)$. Έστω ότι $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, τότε γνωρίζουμε ότι $|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$. Αν $\boxed{\lambda_1 = 1}$, τότε σταματάμε.

Αν $\boxed{\lambda_1 = -1}$, τότε: $1 = |A| =$ σταθερός όρος του $P_A(t) =$
$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\lambda_2 \cdot \lambda_3$

Αν λ_2 ή λ_3 ανήκουν στο $\mathbb{R}$, τότε αντίστοιχα θα έχουμε ότι και λ_3 ή λ_2 ανήκουν στο $\mathbb{R}$, και τότε $\lambda_2, \lambda_3 = \pm 1$. Επειδή $-\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$, αναγκαστικά είτε $\lambda_2 = 1$ είτε $\lambda_3 = 1$

$\longrightarrow$

Αν $\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbb{R}$, τότε $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ και τότε $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$.
Αν $\lambda_2 = a + bi$ τότε: $\lambda_3 = a - bi$. Όμως
$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2 > 0$ και τότε:
: $1 = |A| = -(a^2+b^2)$: άτοπο

$\boxed{\text{Άρα δείξαμε ότι ο } A \text{ έχει ως ιδιοτιμή το } \lambda_1 = 1}$

Έστω $V(1)$ ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, τότε: έστω $\vec{e_1}$: ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\vec{e_1}\| = 1$

Θέτουμε $V = \{k \cdot \vec{e_1} \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R}\}$. Τότε: $\dim_{\mathbb{R}} V = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow V$: γεωμετρικά είναι μια ευθεία(ε) στον $\mathbb{R}^3$

Συμπληρώνουμε το $\vec{e_1}$ σε μια ΟΚΒ $C = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ και τότε: $V^\perp$ = ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα $\vec{e_2}, \vec{e_3}$.
Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} V^\perp = 2$, γεωμετρικά $V^\perp$: είναι ένα επίπεδο (Π) στον $\mathbb{R}^3$, τότε $(\varepsilon) \perp (\Pi)$

Έστω $\vec{x} \in V^\perp$, τότε: $\langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle = 0 \overset{f:\text{ισομετρία}}{=} \langle f(\vec{x}), f(\vec{e_1}) \rangle =$
$= \langle f(\vec{x}), \vec{e_1} \rangle$. Άρα: $f(\vec{x}) \in V^\perp$. Άρα:

$f(V^\perp) \subseteq V^\perp$ και άρα η ισομετρία $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ περιορίζεται σε μια ισομετρία:
$f': V^\perp \to V^\perp$, $f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$. Όμως ο $V^\perp$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$, διότι:
$\dim_{\mathbb{R}} V^\perp = 2$. Άρα η f' είναι μια ισομετρία στο $\mathbb{R}^2$. Ο πίνακας της f στην ΟΚΒ C είναι της μορφής:

$\longrightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\Gamma}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$ όπου Γ = ο πίνακας της f' στην ΟΚΒ $\{\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$ του $V^{\perp}$

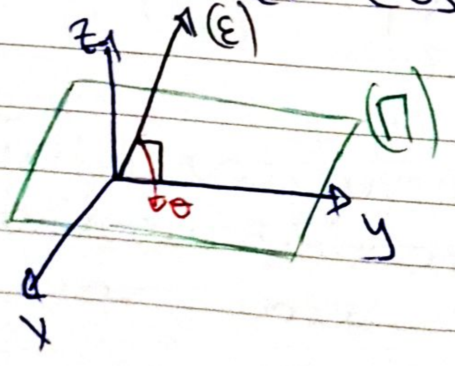
Επειδή οι πίνακες A, B είναι όμοιοι ως πίνακες της f στις βάσεις B και C θα έχουμε: $1 = |A| = |B| = |\Gamma|$. Άρα η f': ισομετρία στο $\mathbb{R}^2 = V^{\perp}$ με πίνακα σε ΟΚΒ τον Γ που έχει ορίζουσα $|\Gamma| = 1$. Επομένως:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Αν P είναι ο πίνακας μετάβασης από την B στην C, τότε: $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$.
Επειδή, οι βάσεις B, C είναι ΟΚΒ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P$: ορθογώνιος $\Rightarrow P^{-1} = {}^tP$ και τότε:
$\boxed{{}^tP \cdot A \cdot P = B} \Rightarrow Tr(A) = Tr(B) = 1 + 2\cos(\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{\cos(\theta) = \dfrac{Tr(A) - 1}{2}}$

Άρα η γωνία θ είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$, έτσι ώστε: $\cos(\theta) = \dfrac{Tr(A) - 1}{2}$



ΑΣΚΗΣΗ: Να δειχθεί ότι ο πίνακας:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π).

ΛΥΣΗ: Εύκολα βλέπουμε ότι ο A είναι ορθογώνιος και $|A| = 1$. Άρα ο A παριστάνει γεωμετρική στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από ευθεία (ε), όπου $(ε) \perp (Π)$. Από το θεώρημα του Euler, η γωνία θ είναι η μοναδική γωνία $θ \in [0, 2π]$, έτσι ώστε: $\boxed{\cos(θ) = \frac{Tr(A) - 1}{2} = -\frac{5}{6}}$.

Από το θεώρημα του Euler, το 1: ιδιοτιμή του A

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{2}{3} - 1\right)x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3} - 1\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ είναι η $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

Άρα το $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$: ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $λ = 1$ και τότε:

Θέτουμε $\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix}\sqrt{11}/11\\ \sqrt{11}/11\\ 3\sqrt{11}/11\end{pmatrix}$

Άρα η ευθεία (ε) είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος V που παράγεται από το $\vec{\varepsilon_1}$

Συμπληρώνουμε το $\vec{\varepsilon_1}$ σε μια ΟΚΒ $C=\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$ του $\mathbb{R}^3$:

Έστω $\vec{x} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon_1} \rangle = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$
$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Θέτουμε: $\vec{\varepsilon_2} = \vec{x} / \|\vec{x}\| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

Έστω $\vec{x} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left.\begin{matrix}\langle \vec{x}, \vec{\varepsilon_1} \rangle = 0\\ \langle \vec{x}, \vec{\varepsilon_2} \rangle = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}k_1 + k_2 + 3k_3 = 0\\ \Rightarrow k_1 - k_2 = 0\end{matrix}$

$\vec{x} = (-3, -3, 2)$ και θέτοντας $\vec{\varepsilon_3} = \vec{x} / \|\vec{x}\| = \frac{\sqrt{22}}{22}\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}$

Τότε (Π) είναι ο υπόχωρος $V^{\perp}$ ο οποίος παράγεται από τα $\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$

Αν $P = M_B^C$, τότε P: ορθογώνια και:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ 1)

$$\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \sqrt{11}/11 \\ \sqrt{11}/11 \\ 3\sqrt{11}/11 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \sqrt{11}/11 & 1/\sqrt{2} & -3\sqrt{22}/22 \\ \sqrt{11}/11 & -1/\sqrt{2} & -3\sqrt{22}/22 \\ 3\sqrt{11}/11 & 0 & 2\sqrt{22}/22 \end{pmatrix}$$

ΑΥΤΟΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΙ ΕΝΔΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος (πεπερασμένης διάστ.) και $f : E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E.
ΣΚΟΠΟΣ: Ζητάμε να ορίσουμε μοναδικό ενδομορφισμό $f^* : E \to E$ έτσι ώστε:
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \boxed{\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle}$ (*)

ΛΗΜΜΑ (RIESZ): Αν $\varphi : E \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{u} \in E$: $\forall \vec{x} \in E$: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} E = n < \infty \Rightarrow$ υπάρχει ΟΚΒ $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ του E. Τότε:
$\forall \vec{x} \in E : \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + x_n \cdot \vec{e_n}$ και άρα:
$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1 \cdot \vec{e_1} + \dots + x_n \cdot \vec{e_n}) = x_1 \cdot \varphi(\vec{e_1}) + \dots + x_n \cdot \varphi(\vec{e_n}) =$
$= \langle x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}, \varphi(\vec{e_1}) \cdot \vec{e_1} + \dots + \varphi(\vec{e_n}) \cdot \vec{e_n} \rangle$

Θέτοντας $\boxed{\vec{v} = \varphi(\vec{e_1}) \cdot \vec{e_1} + \dots + \varphi(\vec{e_n}) \cdot \vec{e_n}}$ και τότε:

$\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle$

Αν $\vec{w} \in E$ έτσι ώστε: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle$, $\forall \vec{x} \in E$.
Τότε: $\forall \vec{x} \in E : \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$